positive sur IR

$\Rightarrow$ la fonction f: $x \mapsto \text{Log}(2x+\sqrt{4x^2+1})$ est dérivable ur IR.

• $\forall x \in \text{IR}; f'(x) = \dfrac{(2x+\sqrt{4x^2+1})'}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{2+\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

2/a- • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\text{Log}[x\,(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\,]}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\text{Log}(x)}{x} + \frac{\text{Log}(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}})}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} f(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty} [-f(X)] = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{X\to+\infty}\left[\dfrac{f(-X)}{-X}\right]$ (avec $X = -x$)

$$= \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{f(X)}{X}\right] = 0 \quad \text{car f est impaire.}$$

$\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

b- $\Delta : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

• $f'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{4\times0^2+1}} = 2$ • $f(0) = \text{Log}\left(2\times0+\sqrt{4\times0^2+1}\right) = 0$

D'où $\Delta : y = 2x$.

c- Soit $k(x) = f(x) - 2x = \text{Log}\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right) - 2x$

On a $k'(x) = f'(x) - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - 2$

$$= 2\frac{1-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} = 2\frac{1-4x^2-1}{\sqrt{4x^2+1}\left(1+\sqrt{4x^2+1}\right)} \le 0$$

on remarque que $k(0) = f(0) - 2\times0 = 0$

$* \; x \ge 0 \Leftrightarrow k(x) \le k(0) = 0$ (car k $\searrow$ sur IR)

$* \; x \le 0 \Leftrightarrow k(x) \ge k(0) = 0.$ (car k $\searrow$ sur IR)

D'où les positions relatives de (C) par rapport à Δ

• Sur $]-\infty, 0]$ on a C_f est au dessus de Δ

• Sur $[0;+\infty[$ on a C_f est au dessous de T